

# Тема 18. Линейные дифференциальные уравнения

## §1. Однородные линейные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

**Определение.** Уравнение вида  $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами  $a_0, a_1$  и  $a_2$ .

Чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно составить характеристическое уравнение:  $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ .

В зависимости от значений корней характеристического уравнения, возможны различные случаи нахождения общего решения дифференциального уравнения.

№ п/ п	Корни характеристического уравнения	Общее решение уравнения
1	Корни действительные и различные ( $k_1 \neq k_2$ )	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	Корни действительные и равные ( $k_1 = k_2 = k$ )	$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$
3	Корни мнимые ( $k = \alpha \pm i\beta$ )	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 2y = 0$ .

**Решение.**

Составим характеристическое уравнение, соответствующее заданному линейному однородному уравнению  $k^2 + 2k + 2 = 0$ . Найдем его корни  $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$ . Корни мнимые.

Смотрим по таблице 1, строка 3:  $\alpha = -1, \beta = 1$ . Общее решение будет следующим:  $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .

Пример. Найти частное решение уравнения  $y'' + y' - 2y = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям:  $y(0)=3, y'(0)=0$ .

**Решение.** Вначале найдем общее решение. Характеристическое уравнение:  $k^2 + k - 2 = 0$

имеет два различных действительных корня  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = 1$ .

Следовательно,  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$  - общее решение.

Дифференцируем обе части последнего равенства:  $y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

Подставив начальные условия, получим систему двух уравнений относительно произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 0 = -2C_1 + C_2. \end{cases}$$

Решение системы дает:  $C_1 = 1$  и  $C_2 = 2$ .

Следовательно,  $y = e^{-2x} + 2e^x$  - есть искомое частное решение.

## §2. Неоднородные линейные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

**Определение.** Уравнение

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (1)$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ . Структура общего решения такого уравнения определяется следующей теоремой:

Общее решение. У неоднородного уравнения предоставляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения  $\bar{y}$  и общего решения  $y$  соответствующего однородного уравнения  $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  (2)

Таким образом, общее решение исходного уравнения (1) запишется в виде:

1. Нахождение  $y$  описано в § 3.

2. Нахождения частного решения  $\bar{y}$ .

Рассмотрим 2 метода нахождения частного решения  $\bar{y}$ : метод неопределенных коэффициентов и метод вариации произвольных постоянных.

## 2.1. Метод неопределенных коэффициентов

Если правая часть уравнения (1) имеет вид:

$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_r(x) \sin \beta x]$ , то частное решение уравнения (1) может быть найдено в виде:  $\bar{y} = x^m e^{\alpha x} [M_s(x) \cos \beta x + N_s(x) \sin \beta x]$  (3)

где  $P_n(x), Q_r(x), M_s(x), N_s(x)$  - многочлены соответственно  $n$ -ой,  $r$ -ой и  $s$ -ой степеней, причем  $s$  - наибольшая из степеней  $n$  и  $r$ . Число  $m$  - кратность  $\alpha \pm \beta i$  как корня характеристического уравнения (2).

Для того чтобы найти коэффициенты

многочленов  $M_s(x)$  и  $N_s(x)$  искомое частное решение (3) подставляют левую часть дифференциального уравнения (1) и производят соответствующие упрощения; затем в полученном тождестве приравнивают коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях, что дает систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов, в которой определяют эти коэффициенты.

Укажем вид  $\bar{y}$  для некоторых частных случаев:

1) если  $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ , то  $\bar{y} = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$ , где  $m$  - кратность  $\alpha = \alpha \pm 0i$  - как корня характеристического уравнения.

2) если  $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$ , то  $\bar{y} = x^m e^{\alpha x} [M_n(x) \cos \beta x + N_n(x) \sin \beta x]$ , где  $m$  - кратность  $\alpha \pm \beta i$  - как корня характеристического уравнения.

3) если  $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x$ , то  $\bar{y} = x^m e^{\alpha x} [M_n(x) \cos \beta x + N_n(x) \sin \beta x]$ , где  $m$  - кратность  $\alpha \pm \beta i$  - как корня характеристического уравнения.

Отметим также, что если  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , то  $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ , где  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  - частные решения уравнений вида (1)  $f(x) = f_1(x)$  и  $f(x) = f_2(x)$

соответственно.

Пример. Найти общее решение уравнения  $y'' + 9y = 9 \cos 3x + 16 \sin 3x$ .

**Решение.**

1) Сначала находим  $y$ . Характеристическое уравнение  $k^2 + 9 = 0$  имеет корни  $k_{1,2} = \pm 3i$ . Следовательно,  $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ .

2. Найдем теперь  $\bar{y}$ . В данном случае правая часть имеет вид (3) при  $\alpha = 0, \beta = 3, P_0(x) = 9, Q_0(x) = 16$ . Так как число  $\alpha \pm \beta i = 3i$  служит однократным корнем характеристического уравнения, то  $m=1$  и частное решение надо искать в виде  $\bar{y} = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$ , где  $A$  и  $B$  – неопределенные коэффициенты. Находим  $\bar{y}' = (3Bx + A) \cos 3x + (-3Ax + B) \sin 3x$ ;

$$\bar{y}'' = (-9Ax + 6B) \cos 3x + (-9Bx - 6A) \sin 3x.$$

Подставляя  $\bar{y}''$  и  $\bar{y}$  в данное уравнение и приводя подобные члены, получай  $6B \cos 3x + 6A \sin 3x = 9 \cos 3x + 16 \sin 3x$ , откуда  $6B=9, -6A=16$ , т.е.  $B=3/2, A=-8/3$ . Следовательно,

$$\bar{y} = x\left(-\frac{8}{3} \cos 3x + \frac{3}{2} \sin 3x\right). \text{ Итак, общее решение}$$

данного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{8}{3} x \cos 3x + \frac{3}{2} x \sin 3x.$$

Пример. Найти частное решение уравнения  $y''+2y'=e^x(3x^2+2x+9)$ , удовлетворяющее условиям  $y(6)=5, y'(0)=1$ .

**Решение.**

1. Найдем общее решение  $y$  соответствующего однородного уравнения  $y''+2y'=0$ . Решая отвечающее ему характеристическое уравнение  $k^2+2k=0$ , получаем корни  $k_1=0, k_2=-2$ . Следовательно,  $y=C_1+C_2e^{-2x}$ .

2. Перейдем к отысканию частного решения  $\bar{y}$  данного уравнения. Здесь правая часть  $f(x)=e^x(3x^2+2x+9)$  имеет вид (3):  $n=2, P_2(x)=3x^2+2x+9, \alpha=1, \beta=0$ . Так как  $\alpha \pm \beta i=1$  не является корнем характеристического уравнения, то  $m=0$ . Следовательно, частное решение  $\bar{y}$  нужно искать в виде, где  $A, B$  и  $C$  - некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Для их отыскания воспользуемся тем, что  $\bar{y}$  должно быть решением данного уравнения. Найдем  $\bar{y}'$  и  $\bar{y}''$ :

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= (Ax^2 + Bx + C)e^x + (2Ax + B)e^x = \\ &= (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x\end{aligned}$$

$$\bar{y}'' = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x + (2Ax + 2A + B)e^x = (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x$$

теперь подставим выражения для  $\bar{y}'$  и  $\bar{y}''$  в данное уравнение:

$$2(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x + (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x = e^x(3x^2 + 2x + 9)$$

Сокращая обе части полученного равенства на  $e^x$  и группируя члены при одинаковых степенях  $x$ , в результате получим

$$\begin{aligned} 3Ax^2 + (8A + 3B)x + 2A + 2B + 3C &= \\ &= 3x^2 + 2x + 9 \end{aligned}$$

Это равенство выполняется тождественно только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , в обеих его частях равны между собой. Итак, для отыскания коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3A = 3, \\ 8A + 3B = 2, \\ 2A + 4B + 3C = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 5. \end{cases}$$

Таким образом,  $\bar{y} = e^x(x^2 - 2x + 5)$ .

Теперь можно записать общее решение данного уравнения:

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = C_1 + C_2 e^{-2x} + (x^2 - 2x + 5)e^x$$

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$$y' = -2C_2 e^{-2x} + (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 5)e^x$$

Подставив начальные условия, получаем систему двух уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ .



$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2 + 5, \\ 1 = -2C_2 - 2 + 5, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$y = -1 + e^{-2x} + (x^2 - 2x + 5)e^x$  - искомое частное решение.

## 2.2. Метод вариации произвольных постоянных

Более общим методом решения линейного неоднородного уравнения (1) является **метод вариации произвольных постоянных**.

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  - линейно независимые частные решения однородного уравнения (2). Тогда общее решение неоднородного уравнения (1) следует искать в виде

$$y = A_1(x)y_1 + A_2(x)y_2 \quad (4)$$

где функция  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$  определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} A_1'(x)y_1 + A_2'(x)y_2 = 0, \\ A_1'(x)y_1' + A_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \quad (5)$$

Решая систему алгебраических уравнений (5), находим

$$A_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad A_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad (6)$$

Где

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (7)$$

- **определитель Вронского**, составленный для решений  $y_1$  и  $y_2$ .

Интегрируя равенства (6) получаем

$$A_1'(x) = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_1,$$

$$A_2'(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_2 \quad (8)$$

откуда, подставляя найденные функции  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$  в соотношение (4) получим общее решение двойного неоднородного уравнения (1).

Пример. Найти общее решение уравнения  $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$

**Решение.** В данном случае частное решение уравнения методом неопределенных коэффициентов найти нельзя, так как в отличие от предыдущего, правая часть уравнения представляет собой функцию другой структуры. Поэтому для нахождения общего решения уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Соответствующее однородное уравнение  $y'' + 4y = 0$ , характеристическое уравнение  $k^2 + 4 = 0$ , имеет корни  $k_{1,2} = 2i$ .

Следовательно,  $y_1 = \cos 2x$  и  $y_2 = \sin 2x$  - два

линейно независимых частных решения однородного уравнения, и общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде  $y = A_1(x) \cos 2x + A_2(x) \sin 2x$  (\*), где функции  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$  определяются из системы уравнений вида (5):

$$\begin{cases} A_1'(x) \cos 2x + A_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2A_1'(x) \sin 2x + 2A_2'(x) \cos 2x = \operatorname{tg} 2x. \end{cases}$$

Решая эту систему по формулам (8), находим

$$A_1'(x) = \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 2x}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin^2 2x}{2 \cos 2x},$$

$$A_2'(x) = \frac{\cos 2x \cdot \operatorname{tg} 2x}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \sin 2x.$$

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$\begin{aligned} A_1'(x) &= -\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} \int \left( \cos 2x - \frac{1}{\cos 2x} \right) dx + C_1 = \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1 \end{aligned}$$

$$A_2'(x) = -\frac{1}{2} \int \sin 2x dx + C_2 =$$

$$-\frac{1}{4}\cos 2x + C_2$$

Подставляя,  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$  в соотношение (\*), находим общее решение данного уравнения:

$$y = \left[ \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1 \right] \cos 2x + \left( -\frac{1}{4} \cos 2x + C_2 \right) \sin 2x$$

### §3. Система дифференциальных уравнений

**Определение.** Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные.

Нормальной системой дифференциальных уравнений называют систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x_1, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x_1, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x_1, y_1, \dots, y_n). \end{cases}, \quad \text{где } y_1, y_2, \dots, y_n -$$

неизвестные функция переменной  $x$ .

Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений являются линейными функциями относительно  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , то система дифференциальных уравнений называется линейной.

Рассмотрим на примерах решение нормальных систем методом исключения.

Пример. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1. \end{cases}$$

**Решение.** Дифференцируем первое уравнение по  $x$ :  $\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dy_2}{dx} \quad (*)$

Из второго уравнения: значение  $\frac{dy_2}{dx}$  подставляем в уравнение  $(*)$   $\frac{d^2 y_1}{dx^2} = 4y_1$ . Решаем получившееся линейное однородное уравнение 2 порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 4y_1 = 0 \rightarrow k^2 - 4 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 2$$

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Используя первое уравнение системы, находим  $y_2 = -\frac{dy_1}{dx} = -2C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{-2x}$ .

Ответ: 
$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 = -2C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{-2x}. \end{cases}$$

Пример. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + \frac{3}{2}x^2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 - 2y_2 + 1. \end{cases}$$

**Решение.** Дифференцируем по  $x$  уравнение

$$(1): \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx} + 3x$$

Подставим в уравнение (\*) выражение  $\frac{dy_2}{dx}$  из уравнения (2):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + 4y_1 + 2y_2 - 4x - 1 + 3x$$

(\*\*)

Выразим из уравнения (1)  $y_2$ :

$$y_2 = y_1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{dy_1}{dx} \quad (***)$$

и подставим в (\*\*). Получаем уравнение

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx} - 6y_1 = 3x^2 - x - 1$$

Решая его, находим:  $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2$ .

Далее, подставляя , в уравнение (\*\*\*),

находим  $y_2 = -C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-3x} + x$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2} x^2, \\ y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x. \end{cases}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Существуют и другие способы решения нормальных систем дифференциальных уравнений.